技術文化論叢

第10号 (2007年)

東京工業大学技術構造分析講座

論文

『技術文化論叢』第10号(2007年)

目次

論文

研究ノート

2006年度 博士・修士論文梗概

<博士論文梗概>

<修士論文梗概>

前期量子論形成期の正準変換とハミルトン・ヤコビ理論

中根美知代*

1. はじめに

20 世紀初頭の量子論の成立は，物理学の大きな転換点であり，その過程の分析は物理学史のもっとも重要な研究課題の一つである．そこでは，ハミルトン・ヤコビ理論と名づけられる理論体系に含まれる数学的手法や概念が効果的に使われていたことはよく知られている．前期量子論の形成に大きく寄与し，また多くの研究者に影響を及ぼした Arnold Sommerfeld (1858-1951) は，1919 年の『原子構造とスペクトル線』の付録で,「力学のハミルトン・ヤコビの方法は，天体力学の摂動論や数学的な興味の対象であり，物理では最近までほとんど必要としていなかったが」と切り出し，この方法を解説している.(1) 今後量子論の研究を進めていくためにはハミルトン・ヤコビ理論の習得が不可欠である，という認識にたってのものであろう．したがって，量子論の形成過程の研究には，この理論を含めた形での問題設定が欠かせないといえよう．

ハミルトン・ヤコビ理論にはさまざまな要素が含まれているが，その骨子は，運動方程式が，H を全エネルギー，$(q_1,\ldots,q_n)$ を質点の位置，$(p_1,\ldots,p_n)$ を運動量として，正準方程式と呼ばれる常微分方程式系

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{1}$$

で書かれ，これに伴う偏微分方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t,q_1,\ldots,q_n,\ \frac{\partial S}{\partial q_1}\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_n}\right)=0, \tag{2}$$

との関係を考察しながら，議論が進められていくことであろう．これは，William Rowan Hamilton (1805-1865) が 1834-35 年にこの理論の原型を提示して以来，今日の教科書にいたるまで一貫していることで，ハミルトン・ヤコビ理論を規定する考え方といってよい.(2)1 階非線形偏微分方程式 (2) は，求めようとする方程式の解 S が直接含まれないという特徴があるが，このようなタイプの偏微分方程式をハミルトン・ヤコビ方程式と呼んでいる．力学的な意味を払拭し，H を変数 $(q_1,\ldots,q_n\ p_1,\ldots,p_n,t)$ に依存する関数とみなして，この理論を純粋に数学的な視点から論じることも Jacobi 以来なされており，正準方程式に伴う不変量や周期解の性質などが考察されてきた．これらの性質は，正準方程式を構成する，正準変数と呼ばれる変数によって表現されることが多い．ハミルトン関数と呼ばれる H や正準変数に適当な意味づけを与えれば，この方程式はいろいろな物理系を表現することができる．ある物理系が正準方程式で記述できれば，その系は数学的な考察から導かれた結果に対応する物理的な性質を持っている，ということになる．

* 立教大学理学部 email: michiyo.nakane@nifty.com

しかも，正準方程式 (1) は，その形を保ったまま，別の変数の間の関係を表す微分方程式に変換することができる．正準変換と呼ばれるこの操作により，新たに導かれた正準方程式や正準変数も，やはり正準方程式固有の性質を持つことになる．もし，ある物理系に対して，位置や運動量よりも適切にその系の状態を記述する変数があり，それが正準変数になるのであれば，大変都合よく議論が進む．前期量子論において，Karl Schwarzschild (1873 - 1916)[3] と Paul Epstein (1871 - 1939)[4] が導入した作用-角変数はそのような変数であった．そして，作用-角変数という正準変数が導入された結果，周期的あるいは多重周期的な系に対する量子論の問題がハミルトン・ヤコビの方法と関連付けられるようになった．Max Jammer は『量子力学史』のなかで,「Hamilton の方法というのがまるで量子力学的な問題を扱うためにわざわざつくられたものであるかのように見えるのは，彼らの仕事によるのである」と評価している．[5]

このような有効な正準変数を導くためには，正準変換の理論が確立していることが不可欠である．Jammer の評価にしたがえば，正準変換の概念こそハミルトン・ヤコビ理論が前期量子論とかかわっていく上での決定的な要素の一つといっても過言ではない．この正準変換という考え方は，いつ頃，どのようにして出てきたのだろうか．

Schwarzschild や Epstein をはじめとする前期量子論にかかわった研究者たちは，正準変換を論じるとき，Carl V. L. Charlier (1862-1934) の教科書『天の力学』を引用している．[6] 19 世紀後半，ハミルトン・ヤコビ理論がもっとも積極的に使われていたのは天体力学の分野であったから，正準変換の理論もまた，この分野で育まれてきたと予想される．しかし，正準変換の歴史はほとんど研究されていない．どこを出発点にとって論じ始めるのが適切なのかも，まだ把握できていない段階である．そこで，今回は，Henri Poincaré (1854-1912) の『天体力学の新しい方法』での記述を確認することから始めていきたい．[7] 19 世紀の天体力学の集大成ともいえるこの著書を繙けば，19 世紀末にどの程度の理解がなされていたかが判断できるからである．そして，そこで問題になっている，正準変換とハミルトン・ヤコビ方程式の完全解を結びつける発想がどのように展開されていくかを分析していく．その過程において，当時の天体力学の第一人者である Poincaré の正準変換への理解がどの程度の水準であったかを評価する．そして，Charlier が Poincaré の成果の上でなした寄与を明らかにする．Charlier の成果が具体的に示されれば，Schwarzschild らの独創性が明らかになり，前期量子論の形成を論じるうえでも，重要な論点が見えてくるだろう．

2. Poincaré『天体力学の新しい方法』における正準変換

2-1 Poincaré による「Jacobi の定理」

Poincaré は，1892 年に出版した『天体力学の新しい方法』の冒頭で，運動方程式を 2 階常微分方程式から正準形に直ちに書き換えている．彼の場合，保存系を考えているので，関数 H は t を陽に含まず，質点の位置と運動量 $(q_1,\ldots,q_n\, p_1,\ldots,p_n)$ のみに依存している．以降，時間に依存しないハミルトン関数を持つ正準方程式を $(1-b)$，それに伴うハミルトン・ヤコビ方程式を $(2-b)$ と書こう．なお，Poincaré をはじめとして，本論文でとりあげる研究者自身が用いた記号は，各自まちまち

である．議論を見通しよく進めるため，本論文では，意味を損ねない程度に記号を統一したうえで，彼らの成果を紹介することにする．

天体力学者としての地位を確立した 1890 年論文で，Poincaré は，正準方程式を活用し，いくつもの事実を明らかにしてきた.[(8)] この有力な方程式を一貫して用いて問題を解決していくにあたり，Poincaré はそれまで知られていた正準方程式にかかわる性質を紹介することから論じ始める．

まず，Poincaré は「Jacobi の第 1 定理」と称して，方程式 $(1-b)$ の一般解は，これに伴うハミルトン・ヤコビ方程式の完全解 $S = S(q_1,\ldots,q_n;h_1,\ldots,h_n)$ $(h_1,\ldots,h_n$ は任意定数$)$ を求め

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad (i=1,\ldots,n) \qquad \frac{\partial S}{\partial h_j} = h'_j, \quad (j=2,\ldots,n) \qquad \frac{\partial S}{\partial h_1} = t + h'_1, \quad (3)$$

とおくことにより与えられることを紹介する†．ここで，$h'_1,\ldots,h'_n$ は新たに導入した任意定数である．h_i と識別する必要上，ダッシュの記号をつけたのであって，h_i を時間微分したものではない．正準方程式という常微分方程式系を偏微分方程式に帰着する方法は，1842-43 年になされた Carl G. Jacobi(1804-1851) の『力学講義』第 20 課に確かに示されている.[(9)]

この特徴的な解法に続いて Poincaré が重要と考えた正準方程式の性質は，正準変換であった．彼は，関数 $S = S(p_1,\ldots,p_n;h_1,\ldots,h_n)$ に対し，旧変数 $(q_1,\ldots,q_n;p_1,\ldots,p_n)$ から新変数 $(h_1,\ldots,h_n;h'_1,\ldots,h'_n)$ の変換が

$$q_i = \frac{\partial S}{\partial p_i}, \qquad h'_i = \frac{\partial S}{\partial h_i} \qquad (4-a)$$

という関係で定義されるならば，新しい変数も関数 $H(h_1,\ldots,h_n;h'_1,\ldots,h'_n)$ について正準方程式をみたすことを「Jacobi の第 2 定理」として紹介している．そして，正準変換の例として直交変換をあげた後，一般的な規則に戻り，S が $(q_1,\ldots,q_n;h_1,\ldots,h_n)$ の関数で，関係式

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad h'_i = \frac{\partial S}{\partial h_i} \qquad (4-b)$$

がみたされるならば，やはり旧変数から新変数への正準変換が定義できるとしている．Poincaré によれば，Jacobi がこれを示したことになっている．

Poincaré は，関数 S について何も述べてはいない.[(10)] しかし，「Jacobi の第 1 定理」で偏微分方程式 $(2-b)$ の完全解を S と書いているのだから，「第 2 定理」での S もそのように考えるほうが自然であろう．実際，すぐ後に見るように，Poincaré は，運動方程式の正準形に伴うハミルトン・ヤコビ方程式の完全解を求めて正準変換し，ドルネー変数による正準形の方程式を導いている．

ところが，第 2 定理に対応する Jacobi 自身の記述は，Poincaré のものとや

† Jacobi は，保存系を扱う際には，その系の全エネルギーを任意定数の一つとみなし，それを他の任意定数と区別して扱っている．ここでは h_1 が全エネルギーに対応しており，Jacobi は (3) 式の第 3 式に相当する関係を全エネルギーという性質を使って導き出していた．

や異なっている．Jacobi は 1838 年論文で，正準変換にかかわる定理を述べた．そして 1890 年に公刊された遺稿“摂動論について”のなかで，この定理の証明が与えられている．[11] これらの著作の中で述べられている定理とは，関数 $\psi = \psi(p_1,\ldots,p_n;h'_1,\ldots,h'_n)$ の間に

$$\frac{\partial\psi}{\partial p_i} = -q_i, \qquad h_i = \frac{\partial\psi}{\partial h'_i} \tag{5-a}$$

という関係があれば正準変換が引き起こされ，$(1-b)$ 式は

$$\frac{dh_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial h'_i}, \quad \frac{dh'_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial h_i}, \tag{5-b}$$

と変換される，となっている．

確かに Jacobi はこの定理で，正準変換をもたらす変数変換について述べている．しかし，Jacobi 自身の定理と Poincaré のいう「Jacobi の第 2 定理」は同じものとは言いがたい．見通しよく議論をすすめるため，今日の力学の教科書の書き方にならい，正準方程式 (1) あるいは $(1-b)$ において，q_i と同じ役割を果たす要素を座標，p_i と同じ役割を担うものを運動量と呼ぶことにしよう．まず，Poinacaré による $(4-a)$ および $(4-b)$ 式と Jacobi の $(5-a)$ 式を比較してみると，$(5-a)$ 式には旧座標と旧運動量の関係を示す式にマイナスの符号がついているが，Poincaré のものにはない．しかも，Jacobi では変換を引き起こす関数 ψ が，旧運動量と新運動量 $(p_1,\ldots,p_n;h'_1,\ldots,h'_n)$ の関数なのに対し，Poincaré の場合は，S が当初は旧運動量と新座標 $(p_1,\ldots,p_n;h_1,\ldots,h_n)$ の関数，最終的には旧座標と新座標 $(q_1,\ldots,q_n;h_1,\ldots,h_n)$ の関数になっている．また，Jacobi が $(1-b)$ を正準変換した後の方程式 $(5-b)$ を示しているのに対し，Poincaré は一般的な場合に対して，変換後の正準方程式を示していない．

より重要なのは変換をひきおこす関数 ψ の実態の認識である．Jacobi は，ψ は旧運動量と新運動量の関数である以上のことを言っていない．仮に，ψ が旧座標と新座標の関数ならば，あるいは，ハミルトン・ヤコビ方程式の完全解 $S = S(q_1,\ldots,q_n;h_1,\ldots,h_n)$ との関係を Jacobi は思いついたかもしれないが，実際にはそうなっていない．しかも Jacobi は，この定理の前後でハミルトン・ヤコビ方程式の完全解について論じるとき，それを W と記号づけ，任意関数 ψ と明確に区別している．Jacobi は，古い変数と新しい変数がある関数によって $(5-a)$ 式で結びつけられるのならば，その変数変換は方程式の正準形を保つことを主張しているだけなのである．その関数がハミルトン・ヤコビ方程式の完全解である，とは言っていないし，その関数を求めて正準変換を例示してもいない．すなわち，ハミルトン・ヤコビ方程式を解いて正準変換を見つけてくるというのは，Poincaré 自身の発見とみなさざるを得ない．

Jacobi の定理の紹介という形で証明をつけず，Poincaré は淡々と記述を進めていく．その過程で，運動方程式の一般解を与える (3) 式と正準変数間の関係を与える (4-b) 式がきわめて類似したものになっていることが示されると，読者は自然に，Jacobi がハミルトン・ヤコビ方程式の完全解が正準変換を引き起こすとの理解に達した，としてしまうだろう．Poincaré が何かの意図をもって，Jacobi

の成果を書き換えたのか，それとも彼にはありがちなケアレス・ミスなのかはこれだけの記述では判断できない．しかし，とにかく，ハミルトン・ヤコビ方程式と正準変換が関係づけられてしまったのである．

2-2 ドロネー変数による正準方程式の導出

Poincaré は Jacobi の方法をケプラー運動に適用し，使い方を例示する．彼はまず，固定した重力中心のまわりを質量 M の質点が運動しているとし，その運動を

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2} - \frac{2M}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \tag{$*$}$$

とする自由度6の正準方程式で記述した．この H を持つ正準方程式を $(1-c)$ としよう． 正準方程式 $(1-c)$ に伴うハミルトン・ヤコビ方程式を解き，任意定数を適当に変換することにより，彼はその完全解を $S = S(q_1, q_2, q_3, G, \Theta, L)$ と表した.(12) 「Jacobi の第1定理」により，$(1-c)$ の一般解は

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\ (i = 1, 2, 3), \quad l = \frac{\partial S}{\partial L}, \quad g = \frac{\partial S}{\partial G}, \quad \theta = \frac{\partial S}{\partial \Theta}, \tag{6}$$

となる．

Poincaré は，ここで現れた任意定数が天体力学で習慣的に使われる変数として意味づけられるとし，a, e, i を動体がなす楕円軌道の長軸，離心率，軌道の傾斜角とすると

$$L = \sqrt{a}, \quad G = \sqrt{a(1-e^2)}, \quad \Theta = G \cos i,$$

となり，θ は昇交点の経度，$g + \theta$ は近点引数，l は平均近点離角となることを指摘した．確かに，ケプラー問題を「Jacobi の第1定理」で解き，そこで登場する任意定数にこのような意味を与えることは，François Tisserand (1845 - 1896) による当時の標準的な教科書『天体力学』(全4巻) 第1巻第8章第41項でも示されている.(13) Poincaré とすれば，自然なおきかえであったのだろう．

次に Poincaré は，H が運動エネルギーとポテンシャル関数 $V = V(q_1, \cdots, q_n)$ の和になった場合を考える．彼は，方程式 (6) に着目し，彼のいうところの「Jacobi の第2定理」により，先に出てきた，旧座標と新運動量のある関数 $S = S(q_1, q_2, q_3,\ G, \Theta, L)$ ，すなわち ハミルトン・ヤコビ方程式の完全解が旧変数 $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ から新変数 $(g, \theta, l,\ G, \Theta, L)$ への正準変換を引き起こすとした．その結果，自由度6の正準方程式は

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dG}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial g}, & \dfrac{d\Theta}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta}, & \dfrac{dL}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial l}, \\[2ex] \dfrac{dg}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial G}, & \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \Theta}, & \dfrac{dl}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial L} \end{array}\right. \tag{D}$$

に帰着されることになる．この方程式は，1860年，Charles Delaunay (1816-1872) が月の運動を研究する際に導入したものである.(14) 今日では正準変数 g, θ, l, G,

Θ, L をドロネー変数と呼んでいる.(15)

Delaunay はこの方程式を，いわゆるニュートン方程式から直接を導いている. Tisserand の教科書でも，同様の導入の仕方がとられている．正準変換を与える関数を具体的に示すことにより，(q_i, p_i) を変数とする運動方程式 $(1-a)$ と方程式 (D) を関係付けて提示したのは，Poincaré の成果であった．そして，(D) 式は，Poincaré が唯一示した変換後の方程式である.

正準変換を引き起こす関数が，もとの正準方程式に対応するハミルトン・ヤコビ方程式の解であることに気づいたのは，確かに Poincaré の慧眼である．しかし，それは Jacobi の結果をかなり強引に改ざんしたもので，実は証明されていない．そうではあっても，彼が導いた正準方程式 (D) は正しい．このような状態にあって，行き詰ったためであろうか，Poincaré はハミルトン・ヤコビ方程式と正準変換の関係についての議論をここで一度打ち切る．そして，正準変換を与える関数とハミルトン・ヤコビ方程式の関係は，ついに彼の手で証明されることはなかった.(16)

3. Charlier の成果

Poincaré の記述は全体として大変混乱しており，上で見たのはその一例にすぎない. Poincaré の成果を整理して紹介したドイツ語による教科書，ということで広く読まれたのが Charlier の『天の力学』であった．実際に Poincaré と文通し，彼の影響を強く受けた Charlier であったが，この 2 巻本の第 1 章末から第 2 章にかけての「Jacobi の第 1 定理」による正準方程式の解法に関する記述には, Poincaré が強調しなかった要素が盛り込まれていた.

一般に偏微分方程式を解くことは常微分方程式系を解くことよりは難しいが，ハミルトン・ヤコビ方程式が変数分離形になれば容易に解ける，というのが Jacobi の指摘だった．これを受けて Paul Stäckel (1862-1919) は 1891 年から 1901 年にかけて，ハミルトン・ヤコビ方程式が変数分離できるような系の運動は多重周期的であることを証明し，このような系の積分を具体的に与えていたのである.(17)Charlier は，多くの場合，天体力学で扱う運動は多重周期的になるということに注目し，Stäckel の求めた積分を実際に使い，時にはそれに修正項を加えながら議論を進めている．これは Poincaré には見られない特徴である.

正準変換についてはかなり議論が進んだ後,『天の力学』第 2 巻第 11 章で論じられている．Charlier は Poincaré 同様，1890 年 に Jacobi が示した定理を取り上げる.「以下のような定理を Jacobi が証明している」としつつ，Charlier はそこで，微妙ではあるが本質的な修正を行なった．すなわち，正準方程式 $(1-b)$ に対して，関数 $\psi(q_1, \ldots, q_n; h_1, \ldots, h_n)$ があり，

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad h'_i = -\frac{\partial S}{\partial h_i}, \tag{7}$$

という関係をみたすならば，旧変数 $(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n)$ から新変数 $(h_1, \ldots, h_n; h'_1, \ldots, h'_n)$ へ変数変換は正準形を保ち，$(1-b)$ 式は，(5-b) 式に変換される，という定理を Jacobi が述べたとしているのである.

Jacobi は旧運動量と新運動量の関数を，Charlier は旧座標と新座標の関数を変換を引き起こす関数として与えている．しかし,「Charlier による Jacobi の定理」

は，Jacobi 自身の定理の証明とほぼ同様に，登場する関係式を適当は変数や任意定数で微分することにより，Charlier が証明している．おそらく Charlier は，ハミルトン・ヤコビ方程式の完全解と正準変換の関係を『新しい方法』から示唆されて，このような関数 ψ をとり，それとともに $(5-a)$ 式を (7) 式に変更したのであろう．

そして，Charlier は，H が t を陽に含んでいる正準方程式 (1) について論じている．このとき，変換を引き起こす関数は t にも依存，すなわち $\psi = \psi(q_1,\ldots,q_n;h_1,\ldots,h_n,t)$ となるが，これが関係式 (7) を満たせば，正準方程式 (1) は，

$$\frac{dh_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial h'_i}, \quad \frac{dh'_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial h_i}, \qquad R = H + \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{8}$$

に変換されることを，Charlier はやはり関係式を適当に微分していくことにより証明した．Jacobi は関数 ψ が t に依存する場合を扱っていないから，確かにこの定理は Charlier 自身の手による拡張である．[18]

引き続いて Charlier は，

$$H\left(t, q_1,\ldots,q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{9}$$

の完全解 $S = S(q_1,\ldots,q_n;h_1,\ldots,h_n,t)$ が

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad h'_i = -\frac{\partial S}{\partial h_i}(i = 1,\ldots,n) \tag{10}$$

とおくことにより，正準方程式 (1) の解を与えることを指摘する．$h_1,\ldots,h_n$ は偏微分方程式の完全解を与えるときに導入された任意定数であり，$h'_1,\ldots,h'_n$ は，正準方程式の解を与えるときに新たに導入された任意定数である．先に指摘したとおり，同様の趣旨の「Jacobi の第 1 定理」は『天の力学』第 1 巻ですでに述べられているが，そこでは (10) 式第 2 式に相当する式に，マイナス符号はついていなかった．しかし，h'_i は任意定数であるから，マイナス符号をつけても定理の意味を損なうものではない．Charlier がこの定理を再度述べたのは，このことを注意するためであろう．そして，これらの任意定数を新座標の位置と運動量とみなせば，ハミルトン・ヤコビ方程式の完全解 S が旧変数 $(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)$ から新変数 $(h_1,\ldots,h_n,h'_1,\ldots,h'_n)$ への正準変換を与えていることを Charlier は指摘した．Poincaré の発見した関係は大筋としては正しかったのである．

Charlier はこの定理を使って，次のように正準変換をする．正準方程式 (1) に対して，ハミルトン関数 H_1 が時間を陽に含まないような補助的な運動を考える．これに対するハミルトン・ヤコビ方程式およびその解は

$$H_1\left(q_1,\ldots,q_n; \frac{\partial V}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial V}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \qquad V = -Ct + W \tag{11}$$

となる．ここで W は t とは独立の任意関数であるから，これを方程式 $C = H_1$ の解とすると，n 個の任意定数を $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ として $W(q_1,\ldots,q_n;\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ と

書ける．一般に C は $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ の関数となる．さて，(11) 式で示された V より対応する正準方程式の解は

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i,\quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i}=-\beta_i, \tag{12}$$

となるが，これから関係式

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=p_i,\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}=\frac{\partial C}{\partial \alpha_i}t-\beta_i, \tag{13}$$

が得られる．W は t に依存しない関数として導入されたが，(11) 式第 2 式の関係があるので t にも依存するとみなすこともできる．関数 W から正準変換が導かれ，正準方程式 (1) は

$$\frac{d\alpha_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \varphi_i},\quad \frac{d\varphi_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \alpha_i},\quad \left(\varphi_i=-\frac{\partial C}{\partial \alpha_i}t+\beta_i\right), \tag{14}$$

という形に変換される．

Charlier は，当初考えている運動が条件付き周期運動となるならば，φ の t の係数を運動の周期の逆数ととれることを示した．このことにより，φ は平均近点離角に相当する変数となることが示されたのである．この過程で Charlier はまた，α_i が条件付周期運動の解から作られる変数 ξ_i に置き換えられることを示した．こうして，正準方程式 (1) は，$(\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\xi_1,\ldots,\xi_n)$ を変数とする正準方程式に置き換えられることになる．周期的な運動を表すのに都合のいい変数が正準変数になりうることは，Charlier の大きな発見であった．Schwarzschild は Charlier が導入した新しい正準変数から着想を得て作用-角変数という概念を整備し，シュタルク効果の説明に成功したことは，Schwarzschild の 1916 年論文の引用から跡付けることができる．これこそ量子的な現象を記述するのに適切で，しかも正準方程式を構成する変数だったのである．

引き続き Charlier は，具体的な問題に対する正準変換を考察していく．その過程で q_i を p_i の関数と捉えている箇所がある．こうした考察を経て彼は，ハミルトン関数の形によっては，旧座標ではなく旧運動量の関数を正準変換を与える関数としたほうが都合がいい場合もあることに気づいたと思われる．そこで Charlier は，旧運動量と新運動量の関数で変換を与えた Jacobi の自身の結果を見直し，おそらく座標と運動量で 4 つの組み合わせを考えたのであろう．Charlier 自身指摘しているように，正準方程式は q_i, p_i についてまったく対称ではない．しかし，Jacobi の 1890 年論文での証明を参照することにより，変換を与える関数とそれに基づく新変数の定義の仕方の関係を，彼は容易に示すことができたと察せられる．Charlier は変換を与える関数とその条件を示して『天の力学』第 7 章第 1 節を締めくくった．それは旧変数での座標を q_i，運動量を p_i，変換後の座標を h_i，運動量を h'_i とすると，変換を与える関数が

(I) 旧座標と新座標の関数 S_1 の場合：$p_i=\dfrac{\partial S_1}{\partial q_i},\quad h'_i=-\dfrac{\partial S_1}{\partial h_i}$

(II) 旧座標と新運動量の関数 S_2 の場合：$p_i = \dfrac{\partial S_2}{\partial q_i}, \quad h_i = \dfrac{\partial S_2}{\partial h'_i}$

(III) 旧運動量と新座標の関数 S_3 の場合：$q_i = -\dfrac{\partial S_3}{\partial p_i}, \quad h'_i = -\dfrac{\partial S_3}{\partial h_i}$

(IV) 旧運動量と新運動量の関数 S_4 の場合：$q_i = -\dfrac{\partial S_4}{\partial p_i}, \quad h_i = \dfrac{\partial S_4}{\partial h'_i}$

となるような変数変換は正準変換となる，ということである．

Jacobi が証明したのは，(IV) の場合，Charlier が示したのは (I) の場合である．Poincaré が提示した変換を起こす関数の形から判断すると，彼はまず，S_3 の場合を論じておいて，とくに断ることなく S_1 の場合に転じている．そして，方程式 (D) を導くときに考えていたのは S_2 の場合である．S_2 に対してならば，(6) 式で定められた変数変換は確かに正準変換になることがわかるが，そのほかの場合については，Poincaré は間違えた関係を提示している．

これから判断されるのは，Poincaré は，正準変換において座標と運動量の取りかえることにより何が起こるかをまったく理解していなかったことである．彼が Jacobi の自身の成果を間違えて覚えこんで，その結果，ハミルトン・ヤコビ方程式の完全解が正準変換を与えることを発見したのか，あるいは，闇雲に計算をしているうちにこの関係に気づき，それに沿うように Jacobi の成果を書き換えたのかはわからない．いずれにせよ彼は，Jacobi の結果を都合のいいように紹介し，すでに知られている結果からつじつまを合わせる形で (D) 式を導いたとしか考えられないのである．Poincaré が自分の主張に対する証明をつけることができなくても当然であろう．Poincaré の直感がたまたま正しかったから導けたとしか思えない成果を生かし，最終的にハミルトン・ヤコビ方程式と正準変換を結びつけたのは Charlier であった．

4. おわりに

今日の力学の教科書では，正準変換とハミルトン・ヤコビ方程式を結び付ける定理の前後には Jacobi の名前があげられることが多い．Niels Bohr(1885-1962) もまた，Charlier を引用してはいるものの，すでに Jacobi がこの関係を認識していたかのような印象を与える記述をしている．(19) また，Morris Klein は，有名な数学史通史の教科書のなかで，Jacobi は，ハミルトン・ヤコビ方程式を解いて正準変換を導く方法を提示したとしている．(20) もちろん，Jacobi のなかに，そう読める記述はあった．(21) しかし，本当にそうであったら，たとえば Poincaré が上で見たような混乱を引き起こすとは考えにくい．したがって，Delaunay は 1860 年に (q_i, p_i) を変数とする正準形をした運動方程式を正準変換して方程式 (D) を導いたといった，19 世紀半ばの時点で正準変換の理論が完成したとしてなされているような歴史的な記述や思い込みは，すべて再検討の余地があるといえよう．

冒頭に，前期量子論の創設者たちが，ハミルトン・ヤコビ理論を有効に使っていたことを述べた．そのときのハミルトン・ヤコビ理論とは一体何を意味しているのだろうか．本稿で一例を見たように，量子論が形成される時期のハミルトン・ヤコビ理論は，Hamilton や Jacobi の成果から，大きく進展している可能性がある．19 世紀半ばに彼らが提示した理論は，その後どのような過程を経て前期量子論に適用できる水準にまでになっていったのか．ハミルトン・ヤコビ理論の歴史

を研究する意義を量子論の形成とのかかわりに求めるならば，その理論が包含するあらゆる要素に対して，この視点からの考察が必要であろう．

文献と注

(1) A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien* (1919) , Braunschweg, p.485.
(2) W.R. Hamilton, "On a General Method in Dynamics," *Philosophical Transactions* Part 2, 1834, pp.247- 308, および "Second Essay on a General Method in Dynamics," *Philosophical Transactions* Part 1, 1835, pp.95-144.
(3) K. Schwarzschild "Zur Quantenhypothese" *Berliner Berichte* **1916**, pp.548-568.= Reprinted in *Karl Schwarzschild : Gesammelte Werke* **3**, (1992), Springer-Verlag Berlin, pp.428-448.
(4) P.S. Epstein, "Zur Theorie des Starkeffektes," *Annalen der Physik*, **50**, (1916), pp.489-520, および "Zur Quantentheorie," *Annalen der Physik*, **51**, (1916), pp.168-188.
(5) M. Jammer, 小出昭一郎訳『量子力学史 1』, 1974 年, 東京図書, p.123.
(6) C.V.L Charlier, *Die Mechanik des Himmels* Bd.1 (1902), Bd.2 (1907), Leizig.
(7) H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, vol.1 (1892), vol.2 (1893), vol.3 (1899), Paris.
(8) H. Poincaré, "Sur la probléme des trois corps et les équation de la dynamique," *Acta Mathematica*, vol.13, 1890, pp.1-270.
(9) C.G.J. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik* は, 1866 年に A. Clebsch が編集して公刊された.
(10) 今日では, 関数 S のような正準変換を引き起こす関数を正準変換の母関数と呼んでいる. しかし, この用語が確立するまでしばらく時間がかかり, しかもその時点では, 正準変換についてより多くのことがわかっていた. 母関数という述語を使うことにより, Poincaré らが使った関数に必要以上の意味付けを与えてしまう可能性があるので, この論文では, この語はつかわないことにする.
(11) C.G.J. Jacobi "Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique", *Comptes Rendus*, **5**, (1837), pp.61-67, および "Über diejenigen Probleme der Mechanik in welchen eine Kräftefunction existirt und über die Theorie der Störungen ," =in *Werke* 5, pp.219-395. 1890 年, *C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke* にて公刊.
(12) Poincaré は,

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2} = \frac{2M}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

と記しているが, 実際には本論文の (*) 式を用いて, 次のように議論を進めていく. まず

$$q_1 = r\sin\omega\cos\varphi, \qquad q_2 = r\sin\omega\sin\varphi, \qquad q_3 = r\cos\omega$$

と極座標変換したうえで，正準方程式 (1-c) に対するハミルトン・ヤコビ方程式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \omega}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\omega}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2=\frac{2M}{r}+2h,$$

をまず導く．ここで h は任意定数である．次に，2つの任意定数 G,Θ を導入することにより，この方程式を

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi}=\Theta\sqrt{M},\quad \left(\frac{\partial S}{\partial \omega}\right)^2+\frac{\Theta^2 M}{\sin^2\omega}=G^2M,\quad \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{G^2M}{r^2}=\frac{2M}{r}+2h,$$

と分解する．そして，S は $r,\ \omega,\ \varphi, G, \Theta,\ h$ すなわち $q_1,q_2,q_3,G,\Theta,\ h$ の関数であることを指摘したうえで，Jacobi の第1定理に従い，

$$y_i=\frac{\partial S}{\partial q_i}\ (i=1,2,3),\quad h'+t=\frac{\partial S}{\partial h},\quad g=\frac{\partial S}{\partial G},\quad \theta=\frac{\partial S}{\partial \Theta},\qquad (**)$$

とおいて，正準方程式の一般解を示す．$h',\ g,\theta$ は新たに導入した任意定数である．さらに，

$$L=\sqrt{\frac{-M}{2h}},\quad h=-\frac{M}{2L^2},\quad n=\frac{M}{L^3},\quad l=n(t+h')$$

と置くことにより，関係式 $\dfrac{\partial S}{\partial L}=l$ を導き，S を q_1,q_2,q_3,G,Θ,L の関数として，正準方程式の一般解 (**) における第2式と置きかえ，(6) 式を得た．

(13) F. F. Tisserand, *Traitè de Mécanique Céleste*, vol.1 (1889), vol.2 (1891), vol.3 (1894), vol.4 (1896), Paris.

(14) C.-E. Delaunay, "Théorie du mouvement de la lune I", *Mémoire de l'Academie des Sciences*, vol.28, 1860, 1-883.

(15) 方程式 (D) においては，l,g,θ は座標，L,G,Θ は運動量となる．

(16) ただし，Poincaré は正準変換への関心は持ち続け，1897 年 ("Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps", *Bulletin Astronomique*, **14**, (1897), pp.53-67) には，$\sum h_i dh'_i - q_i dp_i$ が完全微分形であれば $(q_1,\dots q_n;p_1,\dots,p_n)$ から $(h_1,\dots,h_n;h'_1,\dots,h'_n)$ への変換は正準形を保つという結果を出し，これを整理して『天体力学の新しい方法』第3巻や『天体力学講義』第1巻（*Leçons de Mécanique Céleste*, vol.1 (1905), vol.2 (1907), vol.3 (1910), Paris.）で紹介している．これが正準変換に関する彼の最終的な成果であった．

(17) 1891 年 Halle 大学に提出した教授資格論文（*Über die Integration der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung mittels Separation der Variablen*）に引き続き，P. Stäckel は，"Über die Bewegung eines Punktes in einer n-faschen Mannigfaltigkeit", *Mathematisch Annalen* **42**, (1893), pp.537-563, "Sur une classe de problèmes de dynamique", *Comptes Rendus* **116**, (1893), pp.485-487, "Sur l'intégration de l'équation différentielle de Hamilton", *Comptes Rendus* **121**,(1895), pp.489-492, "Über die Gestalt der Bahnkurven bei einer Klasse dynamischer Probleme",

Mathematisch Annalen 54, (1901), pp.86-90 と題する論文を発表した.
(18) 今日の教科書には，ハミルトン・ヤコビ方程式 $R = H + \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ を解いて方程式 (8) の R を 0 にするような関数 ψ をみつければ (8) 式は容易に積分できるから，正準方程式 (1) が解けるとする説明がなされている．Charlier の場合は，「Jacobi の第 1 定理」で，正準方程式 (1) の解法を与えているので，議論はこのような方向へは進まない.
(19) N. Bohr, " On the quantum thoery of line-spectra" (1918) *D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skr., Naturvid og Mathem. Afd*, 8 [IV], **1**. 本論文作成にあたっては，B.L. van der Waerden ed. *Sources of Quantum Mechanics*, 1967, Amsterdam に収録されたものを参照した．当該箇所は pp.127-128.
(20) M. Klein, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, pp.743-745.
(21) 中根美知代, "20 世紀初頭の「ハミルトン・ヤコビ理論」に関する一考察", 『物理学史ノート』第 10 号，2007，pp.1-13.

The Introduction of the Canonical Transformation to the Hamilton-Jacobi Theory at the Beginning of Twentieth Century

NAKANE, Michiyo

Abstract:

The so-called Hamilton-Jacobi theory offered an effective mathematical technique to explain quantum phenomena. In this respect, it played an important role in the development of the old quantum theory. Schwarzshild's introduction of the action-angular variables in 1916 suggests that the application of the Hamilton-Jacobi theory to the new theory would not have succeeded without the notion of the canonical transformation. This paper examines how the canonical transformation was discussed in celestial mechanics just before the old quantum theory began to be constructed.

In the first volume of *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* published in 1892, Poincaré discussed how a canonical transformation can be associated with a complete solution of the Hamilton-Jacobi equation using his modified version of Jacobi's theorem. He used his original method about the canonical transformation. Then, he derived Delaunay's equations from Hamilton's equations of motion. But Poincaré made mathematical mistakes in his discussion.

Noting Poincaré's results, Charlier finally succeeded in establishing the relation between the canonical transformation and the Hamilton-Jacobi equation in his second volume of *Die Mechanik des Himmels* published in 1907. Through canonical transformations, Charlier demonstrated a proto-type of angular variables, commonly used in celestial mechanics, become the so-called canonical variables. Schwarzshild referred to this result and constructed the action- angular variables that were effectively used in his explanation of Stark effect.

We tend to think that the theory of canonical transformations was established by Jacobi. He actually developed the idea for this theory in the first half of the nineteenth century. But it was Poincaré and Charlier who made Jacobi's theory applicable to the old quantum theory.

ヨハン・ベルヌーイの力学研究における“保存則”と“加速法則”

中島研究室 野澤聡

はじめに

ヨハン・ベルヌーイ(Johann Bernoulli, 1667-1748)は，数学と力学の分野で多くの業績を挙げた学者である．彼の研究のうち，微積分を中心とする数学史の分野では様々な分析が行われ評価されてきた(1)．これに対して，力学史では研究が断片的で不十分であったことは，筆者が先に『科学史研究』に発表した論文で指摘したところである(2)．筆者がそこで述べたように，従来の研究では，ニュートン力学の解析化や活力論争といった概念的枠組みに囚われすぎており，ヨハン・ベルヌーイの論考それ自体の分析がなおざりになっていた．すなわち，ヨハン・ベルヌーイの力学研究は，ニュートン力学の解析化という点でニュートン派であると同時に，“活力論争”では活力概念を擁護したライプニッツ派であり，重力を巡る論争ではデカルト流の渦動論を擁護したデカルト派であるというように，先駆者の成果をバラバラに継承発展させただけであると見なされてきたのである．

先に筆者が『科学史研究』に発表した論文で指摘したように，従来の“活力論争”による分析では，ヨハン・ベルヌーイは活力派であるとされてきた．“活力論争”では，活力概念と運動量概念は両立し得ないとされる．これに対して筆者は，上記の論文でヨハン・ベルヌーイが1727年に発表した衝突理論を分析し，彼が活力保存則と運動量保存則の双方を用いて物体の衝突現象を説明していることを指摘した．つまり，“活力論争”という先入観に囚われている限り，ヨハン・ベルヌーイの衝突理論の基本的前提すら理解困難になってしまうのだ．

本稿では，今度はヨハン・ベルヌーイの力学研究と，ニュートン(Issac Newton, 1642-1727)に由来する力学研究との関係を考察する．従来の見解では，“活力論争”を背景にして，ヨハン・ベルヌーイが用いた“保存則”とニュートンの「運動の第二法則」に由来する“加速法則”とを対立的に捉える傾向が強かった．例えば，18世紀力学史研究で多くの論考を発表しているマルテーセは，ヨハン・ベルヌーイの弦の振動理論（1728年）を分析して，「ニュートンの運動の原理に対して活力理論の優位性を示そうと」したものであると述べている(3)．すなわち，ヨハン・ベルヌーイの力学研究をニュートンの研究と対立するものとして捉えている．

ところが，非常に興味深いことに，マルテーセがニュートンの力学研究と対立するものと見なしたヨハン・ベルヌーイの1728年の弦の振動理論と1735年

の論文で，ヨハン・ベルヌーイは“保存則”に基づく解法と，“加速法則”に基づく解法とを，同一の問題に対して併記している．本稿では，マルテーセが取り扱ったこの2つの論文の問題解法を改めてくわしく分析することによって，ヨハン・ベルヌーイが“保存則”と“加速法則”とを，相補的に捉えて問題解法に利用していたことを示す．2節と3節で見るように，マルテーセの見解によると，この2つの論文は，どちらも活力概念を擁護するために書かれたとされる．しかし，以下で筆者が示すように，これは誤読である．この2つの論文で，ヨハン・ベルヌーイは同一の問題について，“保存則”による解答と，“加速法則”による解答を併記しているのだ．すなわち，彼にとってニュートンに由来する“加速法則”を用いた問題解法と，ヨハン・ベルヌーイ自身が提唱した“保存則”を用いた問題解法は，互いに排除すべきものではなかったことを本稿は明らかにする．

本稿の構成は以下のようなものである．まず1節では，ヨハン・ベルヌーイが1727年の衝突理論で提唱した理論の内容を確認し，2節と3節で分析する論文がこの理論の延長線上にあることを，彼自身の記述によって裏付ける．次に2節では，ヨハン・ベルヌーイが1728年に弦の振動理論を展開した論文を分析し，彼がライプニッツ(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716)の影響を受けて提起した2つの“保存則”に，ニュートンの『プリンキピア』に由来する“加速法則”を関係付けようとしていたことを示す．彼はそこで，同一の問題について，“保存則”から出発する解法と，“加速法則”から出発する解法という二種類の解法を与えていた．3節では，彼が1735年に発表した「活力の真の意味について」という論文を分析し，ここでも彼が同一の問題について“保存則”を用いた解法と“加速法則”を用いた解法を併記していることを確認する．その上で，彼がこの2つの解法を対立するものではなく，各々に一長一短があり，相互に補い合うべきものとして把握していたことを示す．

1. 1727年の衝突理論—“保存則”を使った問題解法の提唱

ヨハン・ベルヌーイが衝突理論を展開した1727年のフランス語の論文「運動の伝達法則について」[(4)]は，彼の力学研究に言及するさいにしばしば利用されてきた．だが，それはもっぱら“活力論争”において彼が活力概念を擁護したことを示すためであった．本稿の冒頭でも触れたが，筆者は先に『科学史研究』に発表した論文「ヨハン・ベルヌーイの力学—衝突法則からの再評価—」で，従来の研究が史料の部分的な分析や誤解に基づいていることを指摘し，ヨハン・ベルヌーイの論文に即して，彼がそこで展開した理論の全体像を明らかにした．すなわち，彼は1727年の論文で，活力保存則と運動量保存則という2つの保存則を基にして力学の広範な問題を解決するという構想を提起したのである[(5)]．

1727年の論文「運動の伝達法則について」で中心的な役割を演じるのは，彼が“運動の伝達法則”と呼ぶ一連の関係式である．それは，2つの固い球が衝

突する前後の速度を関係付けたものであって，①相対速度の保存，②“向きの量(quantité de direction)”の保存，③活力の保存という3つの保存則から構成されている．質量がそれぞれA，Bの2つの物体の衝突前の速度をa，bとし，衝突後の速度をx，yとすると，次のような式で表される．

$$① \quad a-b=y-x$$

$$② \quad Aa+Bb=Ax+By$$

$$③ \quad Aa^2+Bb^2=Ax^2+By^2$$

現在の言葉でいえば，②は運動量保存則，③はエネルギー保存則に相当する(6)．ヨハン・ベルヌーイはこのように提示した3つの保存則から，場合に応じて必要なもの選んで問題を解いている．

彼はその後，全集(Johannis Bernoulli Opera Omnia)(7)を出版する1742年までの15年間に，上記のように“保存則”を用いた論文を6本発表している(8)．これはヨハン・ベルヌーイが同時期に発表した論文11本の過半を占める．したがって，“保存則”を用いて力学の問題を解くという構想は，晩年のヨハン・ベルヌーイの力学研究にとって重要な位置を占めていたと見なすことができよう．

以下で論じるように，その後の展開は，彼がこのような見通しをもって力学研究を進めたことを確かに示している．彼は1727年から1735年の間に発表した論文で“保存則”を活用した新たな成果を発表している．それは彼の構想の有効性を示すものであったが，同時にこの理論の問題点が明らかになり，研究の方向性も変更を余儀なくされた．以下では，彼が1728年と1735年に発表した2つの論考の構造を分析することによって，1727年の論文「運動の伝達法則について」からの構想の変化を跡付ける．

2. 弦の振動理論(1728年)における“保存則”と“加速法則”

ヨハン・ベルヌーイは，1728年の『サンクト・ペテルブルク帝国科学アカデミー紀要(Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae)』に発表したラテン語の論文，

> 「複数の小さな錘が互いに等しい間隔で埋め込まれた振動弦についての考察，長さDの振子が1振れする間の弦の振動数が，活力の原理から確実に求められる」

で弦の振動理論を展開した(9)．この論文（以下では「振動弦について」と略記）については，優れた18世紀力学史家のトゥルーズデルらによって，比較的詳しく分析がなされ，弾性振動理論の先駆的業績として高く評価されてきた(10)．けれども，これまでの研究は，この論文の数学的側面の分析に偏っており，この論文での活力保存則の役割といった力学的前提に関しては，十分に分析がなされたとはいえない．加えていうと，これまでの研究では，ヨハン・ベルヌーイの力学研究の中から弦の振動理論だけを取り出して，ホイヘンス(Christiaan

Huygens, 1629-1695)などの先駆者や，テーラー(Brook Taylor, 1685-1731)などの競争相手，あるいはオイラー(Leonhard Euler, 1707-1783)などの後継者の理論と比較検討することに主眼が置かれてきた[11].

このような比較分析が有益なことは言うまでもない．それによって弦の振動理論に対するヨハン・ベルヌーイの寄与が発見され，力学史における位置付けがより明確になったからである．だが，弦の振動理論だけを孤立させて分析した結果，ヨハン・ベルヌーイの理論の理解が不十分になった点も少なくない．先に述べた活力保存則についての先行研究の見解がこの問題点を浮き彫りにしている．

これまでのところ，ヨハン・ベルヌーイによる弦の振動理論をもっとも詳しく分析したのは，イタリアのマルテーセである．マルテーセの研究は，トゥルーズデルらによるそれまでの研究成果[10]も踏まえているため，先行研究の見解を知るにはもっとも適当であると考えられる．そこで，ヨハン・ベルヌーイの理論を見る前に，マルテーセの分析を簡潔にまとめておきたい．

マルテーセは，1992年に発表した「テーラーとヨハン・ベルヌーイの振動弦研究：18世紀始めにおける連続体の動力学の諸相」という論文で，テーラーとヨハン・ベルヌーイによる弦の振動理論を比較検討することによって，18世紀前半における力学理論の実態を解明しようとした[12]．そして，ヨハン・ベルヌーイが「運動の伝達法則について」（1727年）で活力概念を「熱狂的に擁護した」と見なしている[13]．マルテーセによると，テーラーがニュートンに由来する「運動の第二法則」を使って問題を解いたのに対し，ヨハン・ベルヌーイは，“活力保存則”とガリレオ(Galileo Galilei, 1564-1642)に由来する“落下法則”を用いて問題を解いたという[14]．このことを根拠にしてマルテーセは，ヨハン・ベルヌーイが活力理論の優位性示すために，“活力保存則”を用いて問題を解いたと述べている[3]．つまり，マルテーセによれば，“熱狂的な活力論者”であるヨハン・ベルヌーイによる弦の振動理論は，“活力保存則”と“落下法則”に基づいていることになる．

だが，マルテーセの見解は，“活力論争”という前提を当然視したために，ヨハン・ベルヌーイの論文を読み誤っている．以下で示していくように，ヨハン・ベルヌーイの論文「振動弦について」では，同一の命題に対して二種類の解法が提示されている．すなわち，まず活力保存則（すなわち運動の伝達法則を構成する3要素のうちの1つ）を用いた解法が示されたあとで，「運動の第二法則」に由来する“加速法則”を用いた解法が示される，という構成になっている．マルテーセも，1728年の論文「振動弦について」で2種類の解法が併記されていると述べている[15]．ところが，マルテーセの理解では，ヨハン・ベルヌーイは第2の解法でも活力保存則を暗黙のうちに使っているというのだ．そこで以下では，ヨハン・ベルヌーイの論文「振動弦について」で提示された2つの解法を詳しく検討することによって，マルテーセの見解を検証することにしたい．